POLY-PREPAS

Centre de Préparation aux Concours Paramédicaux

- Section : i-prépa Audioprothésiste (annuel) -

MATHEMATIQUES 1 :

RAPPELS, CONTINUITE, DERIVABILITE

- COURS + ENONCE EXERCICES -

Olivier CAUDRELIER
oc.polyprepas@orange.fr

Chapitre 0 : Rappels de base

A. Second degré

- Equations du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c réels

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \implies 2 \; solutions \; réelles \; \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \\ \Delta = 0 \implies 1 \; solution \; réelle : \; x_1 = \dfrac{-b}{2a} \\ \Delta < 0 \implies pas \; de \; solution \end{cases}$$

- Pour un polynôme du second degré (de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$, les racines sont les valeurs pour lesquelles P(x) = 0

  Pour factoriser ce polynôme, 3 cas sont à distinguer :

  - $si \; \Delta > 0, P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
  - $si \; \Delta = 0, P(x) = a(x - x_1)^2$
  - $si \; \Delta < 0$, pas de factorisation

  Pour étudier le signe de ce polynôme, 3 cas sont à distinguer :

  - $si \; \Delta > 0, le \; signe \; du \; polynôme \; est \; du \; signe \; de \; a \; sauf \; entre \; les \; racines$

x	$-\infty$	x_1	x_2 $\quad + \infty$
signe de P(x)	signe de a	signe de (-a)	signe de a

  - $si \; \Delta = 0, le \; signe \; du \; polynôme \; est \; celui \; de \; a$
  - $si \; \Delta < 0, le \; signe \; du \; polynôme \; est \; celui \; de \; a$

Chapitre 1 : Continuité / Dérivabilité

1. Continuité :

a) Définition : soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit a un réel appartenant à I.

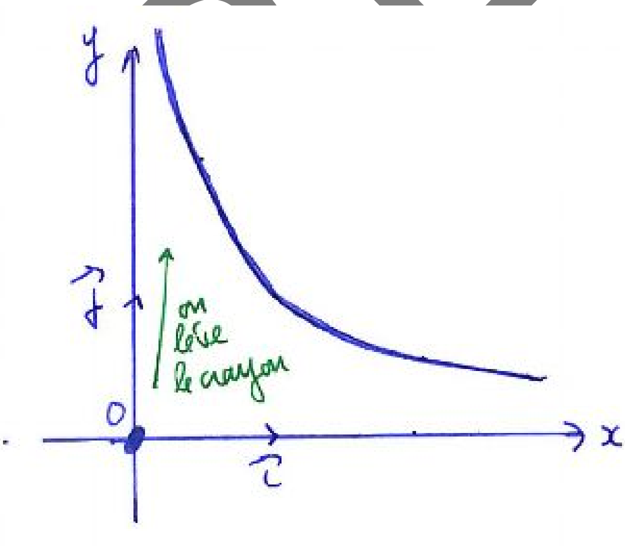
- Une fonction f est dite continue en a si elle admet un limite ***finie*** en ce point (cette limite est *f*(*a*)) : $\mathbf{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$
- Par extension, f est dite continue sur I si elle est continue pour tout réel de I.

On reconnait graphiquement qu'une fonction est continue sur un intervalle I si elle peut être ***tracée sans lever le crayon***.

b) exemple de fonction non-continue en a :

Soit la fonction f définie par morceaux par : $f \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \ \ pour\ x > 0 \\ \quad f(0) = 0 \end{cases}$

on a : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \neq f(0)$, donc f n'est pas continue (à droite) en 0



c) Conséquences :

- Les fonction polynômes sont continues sur ℝ.
- Une fonction rationnelle $\left(\frac{polynôme}{polynôme}\right)$ est continue sur chaque intervalle de son ensemble de définition

ex : $f(x) = \frac{2x^2+3}{1-x}$ $n'estpas\ continue\ sur$ ℝ,
$mais\ elle\ est\ continue\ sur\ ]-\infty;1[\ et\ continue\ sur\ ]1;\ +\infty[$

- La fonction sinus et la fonction cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$
- la fonction e^x est continue sur $\mathbb{R}$
- Les fonctions racine sont continues sur leur ensemble de définition

$$ex : f(x) = \sqrt{2x+3}\ est\ définie\ sur\ [-\frac{3}{2};\ +\infty[,$$
$$donc\ f\ est\ continue\ sur\ [-\frac{3}{2};\ +\infty[,$$

- La somme de fonctions continues est continue
- Le produit ou le quotient de fonctions continues est continu
- Si la fonction *f* est continue en *a* et si la fonction *g* est continue en *f*(*a*) alors la fonction composée *g* o *f* est continue en *a*.

$$ex : f(x) = e^{\sqrt{2x+3}} ; \quad \sqrt{2x+3}\ est\ continue\ sur\ [-\frac{3}{2};\ +\infty[$$
$$et\ la\ fonction\ e^x\ est\ continue\ sur\ \mathbb{R},$$
$$donc\ la\ fonction\ composée\ f\ est\ continue\ sur\ [-\frac{3}{2};\ +\infty[$$

2. Dérivabilité :

a) Définition :

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I*. Soit a un élément de *I*.
On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel L tel que le taux de variation de f ait pour limite L :

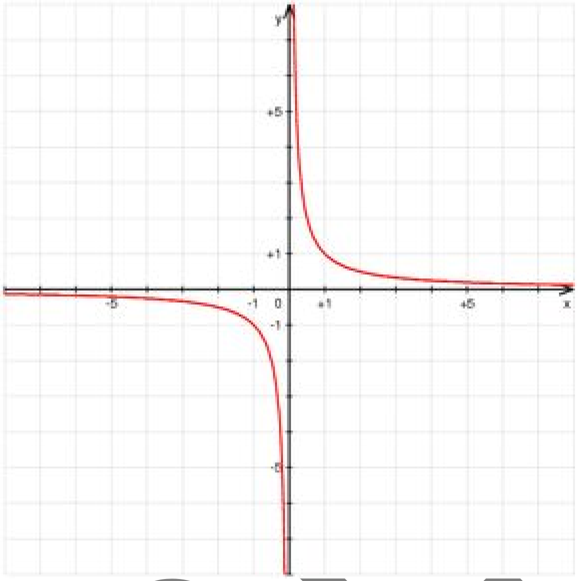
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = L \\ \\ \boldsymbol{OU} : \\ \\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = L \end{cases}$$

Ce réel L, s'il existe, est appelé **nombre dérivé** de f en a et on le note **f'(a)**

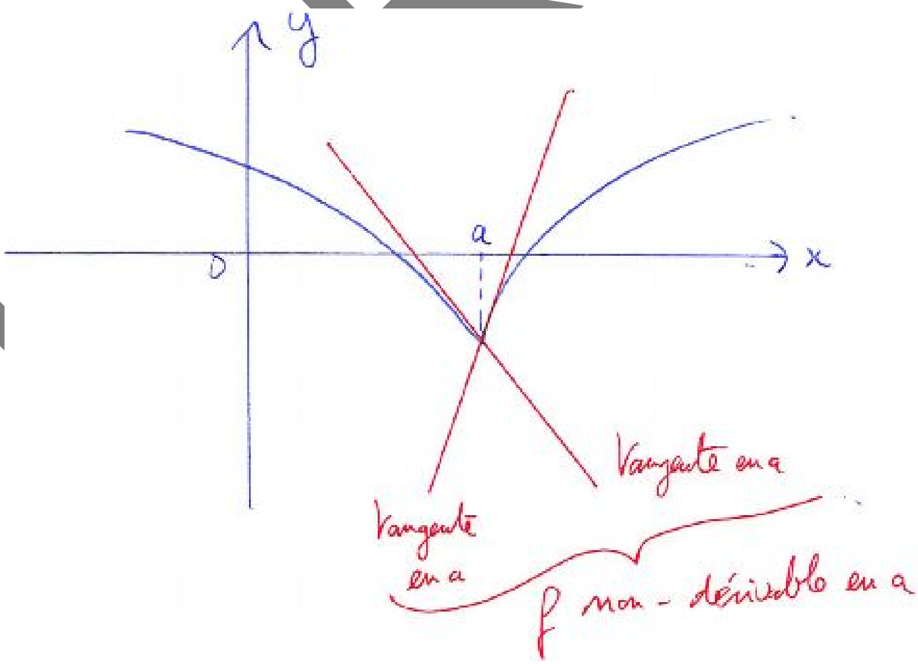
$\Longrightarrow$ si f est dérivable sur tout réel x de I, on dit que f est dérivable sur I.
$\Longrightarrow$ La fonction dérivée de f, notée f', est la fonction qui associe à tout réel x le nombre f'x)

b) Interprétation graphique :

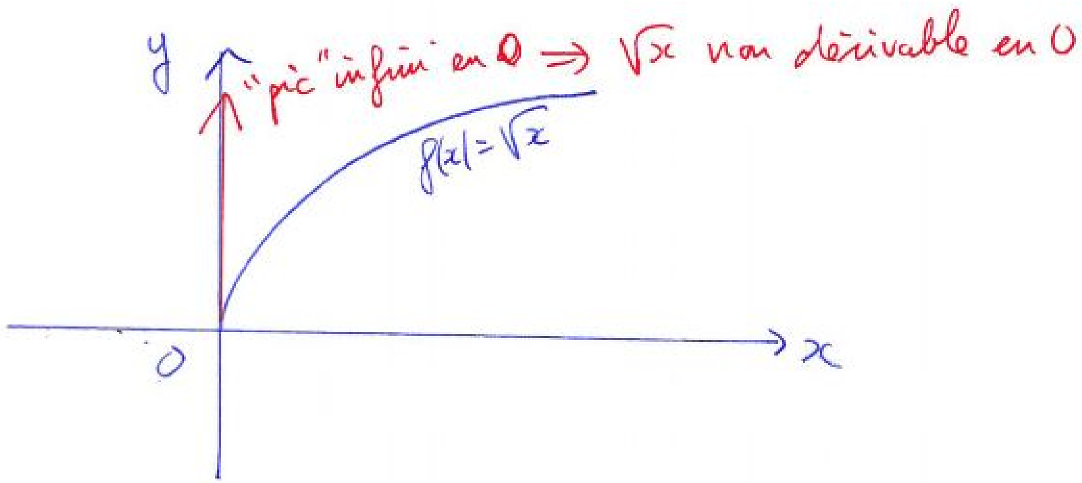
Une fonction dérivable en a signifie que cette fonction a une (et une seule) tangente en a
La notion de dérivabilité se pressent peut-être mieux intuitivement par ce que pourrait être une fonction non-dérivable ; par exemple, la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ ne possède aucune tangente en 0 ; elle n'est donc pas dérivable en 0 (elle est d'ailleurs également non-continue en 0 puisqu'elle présente une discontinuité en ce point)



De même, une fonction qui présente un « pic » en un point a n'est pas dérivable en ce point a puisqu'il y aurait deux tangentes possibles en ce point a



C'est le cas également de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ qui présente un « pic » tellement « fort » en 0 qu'il est infini : on ne peut dès lors plus parler de « pente en 0 » : $\sqrt{x}$ n'est donc pas dérivable en 0 (elle est cependant continue en 0 puisque f(0) =0 elle passe bien par ce point.



Exemple : la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ est-elle dérivable en -1 ? en 0 ?

- $\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{1-x^2} - 0}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{(1-x)(1+x)}}{x+1}$

$$= \lim_{x \to -1} \sqrt{\frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)^2}} = \lim_{x \to -1} \sqrt{\frac{(1-x)}{(1+x)}} = +\infty$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f\ n'estpas\ dérivable\ en -1}$$

- $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-(0)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left[\sqrt{1-x^2} - 1\right].\left[\sqrt{1-x^2} + 1\right]}{x.\left[\sqrt{1-x^2} + 1\right]}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1-x^2) - 1}{x.\left[\sqrt{1-x^2} + 1\right]} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{x.\left[\sqrt{1-x^2} + 1\right]} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{\left[\sqrt{1-x^2} + 1\right]}$$
$$= 0 = f'(0)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f\ est\ dérivable\ en\ 0}$$

exercices d'application : Rappels de base – Continuité/Dérivabilité

exercice 1 : *Pour résoudre une inéquation, toujours spécifier d'abord sur quel intervalle cette inéquation peut-être résolue* ($\simeq$ *ensemble de définition*)

a) *Résoudre :* $\frac{3x+2}{1-4x} \geq 0$ *et résoudre :* $\frac{3-2x}{2x+1} < 0$

b) *Résoudre :* $\frac{3x+1}{2x+3} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

exercice 2 :

a) *résoudre* $x^2 - 8x + 12 = 0$

b) *factoriser* $P(x) = x^2 - 8x + 12 = 0$ *puis résoudre:* $P(x) < 0$

c) *Reprendre les mêmes questions avec* **:** $-x^2 + x + 30 = 0$ *puis* $P(x) = -x^2 + x + 30 < 0$

exercice 3 :

Démontrer que chacune des fonctions suivantes est continue sur $\mathbb{R}$ *:*

a) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 3$

b) $g(x) = x.\sin(x)$

c) $h(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$

d) $i(x) = e^{2x^2+3x-5}$

exercice 4 :

Soit la fonction f suivante, définie par morceaux :

$$f \begin{cases} f(x) = x^2.\sin\frac{1}{x} \quad pour \ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) *f est-elle continue en 0 ?*

b) *f est-elle dérivable en 0 ?*